Równania różniczkowe liniowe pierwszego rzędu

Równanie, które można zapisać w postaci:

$$y' + p(x)\cdot y = q(x)$$

nazywamy równaniem różniczkowym liniowym I rzędu.

Jeżeli $q(x) = 0$, to równanie nazywamy jednorodnym.

Jeżeli $q(x) \neq 0$, to równanie nazywamy niejednorodnym.

1. Rozwiązanie równania różniczkowego jednorodnego przez rozdzielenie zmiennych.

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y' = -p(x)\cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)\cdot y \quad /: y \cdot dx$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\cdot dx$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C$$

$$e^{\ln|y|} = C\cdot e^{-\int p(x)dx}$$

$$\boxed{y = C\cdot e^{-\int p(x)dx}}$$

2. Rozwiązanie równania różniczkowego niejednorodnego przez uzmiennienie stałej.

Zakładamy, że rozwiązanie równania różniczkowego niejednorodnego jest postaci

$$y = C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} \qquad (1)$$

i wstawiamy je do równania różniczkowego

Otrzymujemy kolejno:

$$C'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} - \cancel{C(x)\cdot p(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}} + \cancel{p(x)\cdot C(x)\, e^{-\int p(x)dx}} = q(x)$$

$$C'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$C'(x) = q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$$

Zatem

$$C(x) = \int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\,dx + C_1$$

Wtedy, wstawiając $C(x)$ do rozwiązania (1) otrzymujemy

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\cdot\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\,dx + C_1\, e^{-\int p(x)dx}}$$

<u>Przykład 1</u>

Rozwiążemy równanie $y' + 2\cdot y = e^{3x}$ (*)

Jest to równanie niejednorodne. Rozwiążemy najpierw równanie jednorodne $y' + 2\cdot y = 0$

Rozwiązaniem jest $y = ce^{-\int 2dx} = ce^{-2x}$

Dokonujemy uzmiennienia stałej c.

Szukamy rozwiązania w postaci $y = C(x)\cdot e^{-2x}$ (**)

Różniczkując ostatnią równość otrzymujemy:

$$y' = C'(x)\cdot e^{-2x} - 2C(x)\cdot e^{-2x}$$

wstawiając do równania niejednorodnego (*) otrzymujemy:

$$C'(x)\cdot e^{-2x} - \cancel{2C(x)\cdot e^{-2x}} + \cancel{2\cdot C(x)\cdot e^{-2x}} = e^{3x}$$

$$C'(x) = e^{3x}\cdot e^{2x} \rightarrow C'(x) = e^{5x}$$

Całkując ostatnią równość otrzymujemy:

$$C(x) = \int e^{5x}dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C_1$$

Wstawiając do równania (*) otrzymamy

$$y = C(x)\cdot e^{-2x} = \underline{\left(\frac{1}{5}e^{5x} + C_1\right)\cdot e^{-2x}}$$

Przykład 2 $\boxed{y' + 2y = 4x}$

1. rozwiąz. równania jednorodnego $y' + 2y = 0$ jest

$$y = C\cdot e^{-2x}$$

2. Poszukujemy rozwiązania r-nia niejednorodnego w postaci:

$$y = C(x)\cdot e^{-2x}$$

Mamy: $C(x) = \int 4x\cdot e^{-2x}dx + C_1\cdot e^{-2x}$

Zatem $y = e^{-2x}\cdot \int 4xe^{2x}dx + C_1\cdot e^{-2x} =$

$$= e^{-2x}\cdot 4\cdot\left[\frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] + C_1\cdot e^{-2x} =$$

$$= e^{-2x}\left[2e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right) + C_1\right] = e^{-2x}\cdot\left[e^{2x}(2x-1) + C_1\right] =$$

$$= \underline{C_1 e^{-2x} + 2x - 1}$$

Przykład 3 $\boxed{y' + y = 1}$

1. $y = C\cdot e^{-\int 1dx} = C\cdot e^{-x}$
2. $\underline{y = C(x)\cdot e^{-x}}$, obliczamy $y' = C'(x)\cdot e^{-x} + C(x)\cdot(-e^{-x})$

podst. do równania

$$C'(x)\cdot e^{-x} + \cancel{C(x)\cdot(-e^{-x})} + \cancel{C(x)\cdot e^{-x}} = 1 \quad /:e^{-x}$$

$$C'(x) = \frac{1}{e^{-x}} = e^{x} \to C(x) = \int e^{x}dx = e^{x} + C_1$$

Zatem

$$y = (e^{x} + C_1)\cdot e^{-x} = \underline{1 + C_1e^{-x}}$$